Esercizi per la parte Numerica e Algoritmica, Prof. Serra-Capizzano. Gli esercizi elencati sono da ritenersi come una palestra molto impegnativa: i testi di esame che saranno proposti non avranno una difficoltà superiore.

**Esercizio 1** Sia

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ b_2 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ b_n & & & a_n \end{bmatrix}$$

una matrice $n \times n$ tale che $|a_1| > \sum_{j=1}^{n-1} |c_j|$ e $|a_j| > |b_j|$ per $j = 2, \dots, n$.

**[a]** (OPZIONALE) Si scriva una procedura in un linguaggio di vostra conoscenza per la costruzione della matrice $A$.

**[b]** Si motivi il fatto che il Metodo di Gauss per la risoluzione di un associato sistema lineare può essere applicato senza pivoting.

**[c]** Si valuti il costo computazionale della fattorizzazione $LU$.

**[d]** Si determini una matrice $P$ di permutazione tale che la matrice $B = PAP^T$ si possa fattorizzare nella forma $LU$ con un costo computazionale lineare in $n$.

**Esercizio 2** data $A$ matrice $n \times n$ a predominanza diagonale forte e $b$ vettore a $n$ componenti, si consideri l'applicazione del metodo di Gauss per la risoluzione di un associato sistema lineare $Ax = b$. Si vuole valutare il costo in termini di operazioni moltiplicative per il calcolo di $x$ nei seguenti casi.

**[a]** $A$ in forma di Hessenberg superiore cioè $a_{i,j} = 0$ se $j + 1 < i$;

**[b]** $A$ in forma di Hessenberg inferiore cioè $a_{i,j} = 0$ se $i + 1 < j$;

**[c]** $A$ tridiagonale cioè $a_{i,j} = 0$ se $j < i - 1$ o $j > i + 1$;

**[d]** $A$ a banda $(p, q)$ cioè $a_{i,j} = 0$ se $j < i - p$ o $j > i + q$.

**Esercizio 3** E' data la matrice $A$ di dimensione $n \times n$, di elementi diagonali $a_{i,i} = 2$ e elementi nondiagonali $a_{i,j} = 1$ per $i \neq j$.

Si dica se il metodo di Gauss Seidel è convergente.

**Esercizio 4** Sia $A$ matrice $n \times n$ nonsingolare e si consideri la successione di matrici

$$X^{(k+1)} = X^{(k)}(2I - AX^{(k)})$$

con $X^{(0)}$ matrice iniziale data.

**[a]** Si verifichi che se $X^{(0)}$ commuta con $A$, allora $X^{(k)}$ commuta con $A$ per tutti i $k$.

**[b]** Si dimostri che se $X^{(k)}$ converge a $B$ e $B$ è invertibile, allora vale che $B = A^{-1}$.

**[c]** Posto $R^{(k)} = I - AX^{(k)}$, si dimostri che

$$R^{(k+1)} = \left[R^{(k)}\right]^2.$$

**[d]** Alla luce di **[c]** si dia una condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di $X^{(k)}$ a $A^{-1}$.

**Esercizio 5** Sia

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ b_2 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ b_n & & & a_n \end{bmatrix}$$

una matrice $n \times n$ tale che $|a_1| > 2 \sum_{j=1}^{n-1} |c_j|$ e $|a_j| > 2|b_j|$ per $j = 2, \dots, n$.
**[a]** (OPZIONALE) Si scriva una procedura in un linguaggio di vostra conoscenza per la costruzione della matrice $A$.
**[b]** Si motivi il fatto che il metodo di Jacobi ed il metodo di Gauss-Seidel per la risoluzione di un associato sistema lineare siano convergenti.
**[c]** Si valuti il costo computazionale di una singola iterazione del metodo di Jacobi e del metodo di Gauss-Seidel.
**[d]** Nel caso del metodo di Jacobi si determini una maggiorazione del numero di iterazioni richieste affinché l'errore misurato in norma infinito si riduca di un fattore di $10^6$.

**Esercizio 6** Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false. In caso affermativo si dia una dimostrazione; in caso negativo si proponga un controesempio.
**[a]** Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.
**[b]** Ogni matrice normale è diagonalizzabile.
**[c]** Ogni matrice diagonalizzabile è normale.
**[d]** Data $A$ Hermitiana e considerato $x$ vettore tale che $\|x\|_2 = 1$, vale che $x^H Ax \geq \lambda_{\min}$ dove $\lambda_{\min}$ è l'autovalore minimo di $A$.

**Esercizio 7** E' data la matrice tridiagonale $A$ di dimensione $5 \times 5$, di elementi diagonali $a_{1,1} = 7$, $a_{2,2} = 4$, $a_{3,3} = 6$, $a_{4,4} = 15$ e $a_{5,5} = 5$ ed elementi nondiagonali $a_{i,i+1} = 4$ e $a_{i+1,i} = 1$ per $i = 1, 2, 3, 4$.
**[a]** Si localizzino gli autovalori con l'uso dei teoremi di Gershgorin su $A$ e $A^T$.
**[b]** Si individui una matrice diagonale $D$ tale che $B = DAD^{-1}$ sia simmetrica.
**[c]** Si applichino i teoremi di Gershgorin a $B$ e si localizzino di conseguenza gli autovalori di $A$.
**[d]** Alla luce dei risultati al punto **[c]** si dica se il metodo delle potenze per il calcolo dell'autovalore massimo in modulo è convergente.

**Esercizio 8** E' noto che $\lim_{n\to\infty} A^n = 0$ se e solo se $\rho(A) < 1$ ($\rho(A)$ è il raggio spettrale di $A$). Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false. In caso affermativo si dia una dimostrazione; in caso negativo si proponga un controesempio.
**[a]** $\rho(A) < 1$ e $\rho(B) < 1$ implica che $\lim_{n\to\infty} (AB)^n = 0$.
**[b]** $\rho(A) \geq 1$ e $\rho(B) \geq 1$ implica che $\lim_{n\to\infty} (AB)^n \neq 0$.

[c] $\|A\|_2 < 1$ e $\|B\|_2 < 1$ implica che $\lim_{n\to\infty} (AB)^n = 0$.
[d] $\|A\|_2 \geq 1$ e $\|B\|_2 \geq 1$ implica che $\lim_{n\to\infty} (AB)^n \neq 0$.

**Esercizio 9** Sia a un parametro complesso e $A(a)$ una matrice $n \times n$ con $n \geq 15$. Si supponga che $(A(a))_{i,i} = 2$ per ogni $i$, che $(A(a))_{4,15} = 1+a$, $(A(a))_{15,4} = 1 + \bar{a}$ e che tutti gli altri elementi siano uguali a 1.
[a] Si dimostri che gli autovalori di $A(a)$ sono tutti reali.
[b] Si dimostri che $A(a)$ non è definita in segno (cioe' ha autovalori positivi e negativi) per $|1 + a| > 2$.
[c] Si dimostri che $A(a)$ è definita positiva per $|a| < 1$. Che succede per $|a| = 1$?
[d] Si dia un'espressione esplicita degli autovalori di $A(0)$. Si dica in tale caso se la fattorizzazione di Choleski è applicabile.

**Esercizio 10** E' data la matrice $A$ tridiagonale di dimensione $n \times n$, di elementi diagonali $a_{i,i} = b_i \in \mathbf{C}$, $i = 1, \ldots, n$, elementi sottodiagonali $a_{i,i-1} = a_i \in \mathbf{R}^+$, $i = 2, \ldots, n$ e elementi sopradiagonali $a_{i,i+1} = c_i \in \mathbf{R}^+$, $i = 1, \ldots, n-1$ (gli altri elementi sono nulli). Assumendo che $|b_i| > a_i + c_i$, si vuole risolvere il sistema lineare

$$A^2\mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{1}$$

[a] Si dimostri che $A^2$ è invertibile.
[b] Si considere il seguente algoritmo per il calcolo di $\mathbf{x}$ in (1): si calcola $\mathbf{y}$ tale che $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$ con il metodo di Gauss e si calcola $\mathbf{x}$ tale che $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ ancora con il metodo di Gauss. Valutare correttezza e complessità dell'algoritmo.
[c] Si considera il seguente algoritmo per il calcolo di $\mathbf{x}$ in (1): si calcola $B = A^2$ e si calcola $\mathbf{x}$ tale che $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con il metodo di Gauss. Valutare correttezza e complessità dell'algoritmo.
[d] Si dimostri che il metodo di Gauss-Seidel per il calcolo di $\mathbf{x}$ tale che $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $B = A^2$, è applicabile e convergente nel caso in cui $b_i = a_i + c_i + 1$.

**Esercizio 11** Sia $f(x) = xe^x$, $x \in [0, 1]$. Siano dati i nodi $x_j = \frac{j^2}{n^2}, j = 0, \ldots, n$. Sia $P_n$ il polinomio che interpola $f$ sui nodi $x_j, j = 0, \ldots, n$.

a) Si dimostri che
$$\lim_{n\to\infty} \|f - P_n\|_{\infty,[0,1]} = 0.$$

b) $\forall \alpha > 0$ si discuta
$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha \|f - P_n\|_{\infty,[0,1]}.$$

c) Si fornisca una maggiorazione dall'alto per $\|f - P_n\|_{\infty,[0,1]}$ e si indichi un valore $\hat{n}$ tale per cui $\|f - P_n\|_{\infty,[0,1]} \leq 10^{-8}$ per ogni $n \geq \hat{n}$.

**Esercizio 12** Sia data $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ tale che

$$A(i,j) = \begin{cases} (-1)^j & \text{se } i \text{ pari}, \\ \\ 1 & \text{altrimenti}, \end{cases} \qquad i,j = 1,\ldots,n.$$

a) Discutere al variare di $\alpha > 0$ se il metodo di Gauss per la risoluzione del sistema lineare $Bx = b$ risulta applicabile senza pivoting con $B = \alpha I + A$.

b) Discutere al variare di $\alpha$ numero complesso se il metodo di Gauss per la risoluzione del sistema lineare $Bx = b$ risulta applicabile senza pivoting con $B = \alpha I + A$.

c) Discutere il costo computazionale di un metodo tipo Shermann-Morrison-Woodbury per la risoluzione del sistema lineare $Bx = b$, con $B = I + A$.

**Esercizio 13** Data $A \in \mathbf{Z}^{n\times n}$ ($\mathbf{Z}$ numeri interi positivi) si argomentino la risposte alle seguenti richieste.

a) Si diano condizioni necessarie e sufficienti sulla matrice $A$ tali che l'inversa di $A$ esista ed appartenga a $\mathbf{Z}^{n\times n}$.

b) Si dia un algoritmo il piu' efficiente possibile per verificare che $A \in \mathbf{Z}^{n\times n}$ ammette inversa appartenente a $\mathbf{Z}^{n\times n}$.

**Esercizio 14** Si considerino $n_1$, $n_2$ interi positivi e sia $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ tale che $n = n_1 + n_2 + 1$

$$A = \begin{bmatrix} B_1 & & \\ & B_2 & \mathbf{v} \\ & \mathbf{v}^T & -20 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 & 1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ -1 & -2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -2 & 1 \\ & & & -1 & -2 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{v}$ ultimo vettore della base canonica dello spazio $\mathbf{R}^{n_2}$.

a) Utilizzando i teoremi di Gerschgorin (e le loro dimostrazioni) si localizzi nel modo migliore possibile lo spettro di $A$.

b) Si dica se esiste un autovalore $\mu$ tale che $-\mu = \rho(A)$.

c) Per tale autovalore $\mu$ e' vero che qualunque autovettore corrispondente $\mathbf{x}$ deve necessariamente avere l'ultima componente $x_n$ tale per cui $\|\mathbf{x}\|_\infty = |x_n| > |x_s|$, $s = 1, \ldots, n-1$? Si argomenti la risposta.